Enoncés : Stephan de Bièvre
Corrections : Johannes Huebschmann

Extremums locaux, gradient, fonctions implicites

Exercice 1

Pour chacune des fonctions suivantes étudier la nature du point critique donné :

1. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ au point critique $(0,0)$;
2. $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6$ au point critique $(0,0)$;
3. $f(x,y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2 + 10$ au point critique $(0,0)$.

Indication ▼ Correction ▼ [002641]

Exercice 2

Trouver les points critiques de la fonction f suivante et déterminer si ce sont des minima locaux, des maxima locaux ou des points selle.

$$f(x,y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$$

Indication ▼ Correction ▼ [002642]

Exercice 3

1. Soit f une fonction réelle d'une variable réelle de classe C^2 dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Montrer que la fonction réelle F des deux variables x et y définie dans un voisinage de $(0,0)$ par $F(x,y) = f(x)f(y)$ n'a pas d'extremum relatif en $(0,0)$. Est-ce que le point $(0,0)$ est quand même critique ? Si oui caractériser sa nature.
2. Déterminer les points critiques, puis les minima et les maxima locaux de
$$f(x,y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y).$$
Remarque : en utilisant la périodicité de la fonction, on peut limiter le nombre de cas à étudier.

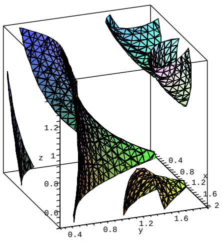
Indication ▼ Correction ▼ [002643]

Exercice 4

Déterminer l'équation du plan tangent à la surface de niveau

$$\sin(\pi xy) + \sin(\pi yz) = 1,$$

au point de coordonnées $(1, \frac{1}{6}, 1)$. Identifier, en ce point, un vecteur perpendiculaire à la surface. Votre résultat est-il compatible avec la figure ci-dessous ? Expliquer.



Indication ▼ Correction ▼ [002644]

Exercice 5

Soit $\mathscr{C}$ la courbe plane d'équation $f(x,y) = ye^x + e^y \sin(2x) = 0$.

1. Appliquer le théorème des fonctions implicites à la courbe $\mathscr{C}$ au point $(0,0)$.
2. Déterminer la limite de y/x quand (x,y) tend le long la courbe $\mathscr{C}$ vers $(0,0)$.

Indication ▼ Correction ▼ [002645]

Exercice 6

1. Déterminer les points stationnaires de la fonction f de deux variables définie par $f(x,y) = x\,(x+1)^2 - y^2$ et préciser la nature de chacun d'eux.
2. Tracer la courbe constituée des points tels que $f(x,y) = 0$ et $x \geqslant 0$. (*Indication* : Étudier la fonction $x \mapsto \sqrt{x}\,(x+1)$ pour $x \geqslant 0$).
3. Montrer que le point $(-1,0)$ est un point isolé de la partie
$$\mathscr{C} = \{(x,y); f(x,y) = 0\}$$
du plan, c'est-à-dire, le point $(-1,0)$ appartient à cette partie et il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que $D_\varepsilon \cap \mathscr{C} = \{(-1,0)\}$ où D_ε est le disque ouvert centré en $(-1,0)$ et de rayon ε.
4. Énoncer le théorème des fonctions implicites.
5. Montrer que, quel que soit le point (x_0,y_0) de $\mathscr{C}$ distinct de $(-1,0)$, au moins une des deux alternatives (i) ou (ii) ci-dessous est vérifiée :
   (i) Il existe une fonction h de classe C^1 de la variable x définie dans un intervalle ouvert approprié telle que $h(x_0) = y_0$ et telle que, pour qu'au voisinage de (x_0,y_0) les coordonnées x et y du point (x,y) satisfassent à l'équation $f(x,y) = 0$ il faut et il suffit que $y = h(x)$.
   (ii) Il existe une fonction k de classe C^1 de la variable y définie dans un intervalle ouvert approprié telle que $h(y_0) = x_0$ et telle que, pour qu'au voisinage de (x_0,y_0) les coordonnées x et y du point (x,y) satisfassent à l'équation $f(x,y) = 0$ il faut et il suffit que $x = k(y)$.

Indication ▼ Correction ▼ [002646]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Rappel : Pour qu'un point critique non dégénéré présente un maximum relatif (resp. minimum relatif) il faut et il suffit que la forme hessienne en ce point soit négative (resp. positive) ; pour qu'un point critique non dégénéré présente un point selle il faut et il suffit que la forme hessienne en ce point soit (non dégénérée et) indéfinie.

Indication pour l'exercice 2 ▲

Voir l'exercice précédent.

Indication pour l'exercice 3 ▲

Voir les exercices précédents.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Le plan tangent à la surface d'équation $f(x,y,z)=0$ au point (x_0,y_0,z_0) est donné par l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0. \qquad (1)$$

Indication pour l'exercice 5 ▲

Rappel du théorème des fonctions implicites pour une fonction f de classe C^1 de deux variables définie dans un ouvert du plan : *Soit (x_0,y_0) un point tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$. Au voisinage de x_0, il existe une fonction h de classe C^1 de la variable x définie dans un intervalle ouvert approprié telle que $h(x_0)=y_0$ et telle que, pour qu'au voisinage de (x_0,y_0) les coordonnées x et y du point (x,y) satisfassent à l'équation $f(x,y)=0$ il faut et il suffit que $y=h(x)$ et, s'il en est ainsi,*

$$h'(x_0)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}.$$

Dès que l'intervalle de définition de la fonction h est fixé la fonction h est unique.

Indication pour l'exercice 6 ▲

Voir l'exercice précédent.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. $df = (2x-y)\mathrm{d}x + (2y-x)\mathrm{d}y$ et $\mathrm{Hess}_f = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ d'où

$$\begin{aligned}(u,v)\mathrm{Hess}_f(0,0)\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} &= (u,v)\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ &= u(2u-v)+v(2v-u) = 2(u^2-uv+v^2) \\ &= 2\left(\left(u-\tfrac{v}{2}\right)^2+\tfrac{3}{4}v^2\right).\end{aligned}$$

Par conséquent la forme hessienne au point $(0,0)$ est positive et ce point présente donc un minimum local.

2. $f(x,y) = x^2+2xy+y^2+6 = (x+y)^2+6$ d'où le point $(0,0)$ présente un minimum local.
3. $df = (3x^2+2x+2y^2+3y)\mathrm{d}x + (4xy-4y^3+3x+2y)\mathrm{d}y$ et

$$\mathrm{Hess}_f = \begin{bmatrix} 6x+2 & 4y+3 \\ 4y+3 & -12y^2+4x+2 \end{bmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned}(u,v)\mathrm{Hess}_f(0,0)\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} &= (u,v)\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ &= (2u+3v)u+(3u+2v)v = 2(u^2+3uv+v^2) \\ &= 2\left(\left(u+\tfrac{3v}{2}\right)^2-\tfrac{5}{4}v^2\right).\end{aligned}$$

Par conséquent la forme hessienne au point $(0,0)$ est non dégénérée et indéfinie et ce point présente un point selle.

Correction de l'exercice 2 ▲

Puisque $df = \cos x\,\mathrm{d}x + (2y-2)\mathrm{d}y$, les points critiques sont les points $((k+1/2)\pi, 1)$ $(k \in \mathbb{Z})$. En plus, $\mathrm{Hess}_f = \begin{bmatrix} -\sin x & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ et

$$-\sin((k+1/2)\pi) = (-1)^{k+1}$$

d'où $\mathrm{Hess}_f((k+1/2)\pi, 1) = \begin{bmatrix} (-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Par conséquent, si k est impaire, le point $((k+1/2)\pi, 1)$ présente un minimum local et, si k est paire, le point $((k+1/2)\pi, 1)$ présente un point selle.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. $dF = f(y)f'(x)\mathrm{d}x + f(x)f'(y)\mathrm{d}y$ et

$$\mathrm{Hess}_f(x,y) = \begin{bmatrix} f(y)f''(x) & f'(x)f'(y) \\ f'(x)f'(y) & f(x)f''(y) \end{bmatrix} \tag{2}$$

d'où $\mathrm{Hess}_f(0,0) = (f'(0))^2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et

$$(u,v)\mathrm{Hess}_f(0,0)\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = (f'(0))^2(u,v)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 2(f'(0))^2uv$$

Par conséquent la forme hessienne au point $(0,0)$ est non dégénérée et indéfinie et ce point ne peut pas présenter un extremum relatif. En effet, le point $(0,0)$ est critique mais un point selle.

2. D'après la partie (1.) et la périodicité, les points de la forme
$$(x,y) = (k,l) \in \mathbb{R}^2,\ k,l \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$
présentent des points selle. Également d'après la partie (1.),
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= f(y)f'(x) = 2\pi\sin(2\pi y)\cos(2\pi x)\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= f(x)f'(y) = 2\pi\sin(2\pi x)\cos(2\pi y).\end{aligned}$$
Par conséquent, pour que le point (x,y) soit critique il faut et il suffit qu'il soit de la forme
$$(k,l),\ (k+\tfrac{1}{2},l),\ (k,l+\tfrac{1}{2}),\ (k+\tfrac{1}{2},l+\tfrac{1}{2}),\ k,l\in\mathbb{Z},$$
ou
$$(k+\tfrac{1}{4},l+\tfrac{1}{4}),\ (k+\tfrac{1}{4},l+\tfrac{3}{4}),\ (k+\tfrac{3}{4},l+\tfrac{1}{4}),\ (k+\tfrac{3}{4},l+\tfrac{3}{4}),\ k,l\in\mathbb{Z}.$$
D'après la périodicité, il suffit d'examiner les huit points
$$(0,0),\ (\tfrac{1}{2},0),\ (0,\tfrac{1}{2}),\ (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}),\ (\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4}),\ (\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4}),\ (\tfrac{3}{4},\tfrac{1}{4}),\ (\tfrac{3}{4},\tfrac{3}{4})$$
et, d'après (1.), l'origine présente un point selle. D'après (2),
$$\begin{aligned}\mathrm{Hess}_f(0,\tfrac{1}{2}) &= \begin{bmatrix} f(\frac{1}{2})f''(0) & f'(0)f'(\frac{1}{2})\\ f'(0)f'(\frac{1}{2}) & f(0)f''(\frac{1}{2})\end{bmatrix} = 16\pi^2\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\\ \mathrm{Hess}_f(\tfrac{1}{2},0) &= \begin{bmatrix} f(0)f''(\frac{1}{2}) & f'(\frac{1}{2})f'(0)\\ f'(\frac{1}{2})f'(0) & f(\frac{1}{2})f''(0)\end{bmatrix} = 16\pi^2\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\\ \mathrm{Hess}_f(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) &= \begin{bmatrix} f(\frac{1}{2})f''(\frac{1}{2}) & f'(\frac{1}{2})f'(\frac{1}{2})\\ f'(\frac{1}{2})f'(\frac{1}{2}) & f(\frac{1}{2})f''(\frac{1}{2})\end{bmatrix} = 16\pi^2\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$
d'où les points $(0,\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2},0)$ et $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ présentent des points selle. Il est géométriquement évident que le comportement de la fonction sin entraîne que les points $(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ et $(\frac{3}{4},\frac{3}{4})$ présentent des maxima et que les points $(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$ et $(\frac{3}{4},\frac{1}{4})$ présentent des minima.

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x,y,z) = \sin(\pi xy) + \sin(\pi yz) - 1.$$
Ses dérivées partielles sont
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \pi y\cos(\pi xy),\ \frac{\partial f}{\partial y} = \pi(x\cos(\pi xy) + z\cos(\pi yz)),\ \frac{\partial f}{\partial y} = \pi y\cos(\pi yz)$$
et, après simplification, au point $(1,\frac{1}{6},1)$, l'équation (1) du plan tangent à la surface de niveau en discussion devient
$$(x-1) + 12(y-1/6) + (z-1) = 0.$$
Ainsi, en ce point, le vecteur $(1,12,1)$ est perpendiculaire à la surface.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Puisque $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^x + 2e^y\cos(2x)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = e^x + e^y\sin(2x)$ il s'ensuit que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 2$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$. Par conséquent, il existe une fonction h de la variable x définie au voisinage de 0 telle que $h(0) = 0$ et telle que, pour qu'au voisinage de $(0,0)$ les coordonnées x et y du point (x,y) satisfassent à l'équation $ye^x + e^y\sin(2x) = 0$ il faut et il suffit que $y = h(x)$; de même il existe une fonction k de la variable y définie au voisinage de 0 telle que $h(0) = 0$ et telle que, pour qu'au voisinage de $(0,0)$ les coordonnées x et y du point (x,y) satisfassent à l'équation $ye^x + e^y\sin(2x) = 0$ il faut et il suffit que $x = k(y)$. En plus,
$$h'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)} = -2,\ k'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)} = -\tfrac{1}{2}.$$
2. Puisque le point $(0,0)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}$, en 0, les fonctions h et k prennent les valeurs $h(0) = 0$ et $k(0) = 0$. Par conséquent,
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0),(x,y)\neq 0 \\ ye^x+e^y\sin(2x)=0}} y/x = h'(0) = -2.$$

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Puisque $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$ et
$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x+1)^2 + 2x(x+1) = (x+1)(3x+1) = 3x^2 + 4x + 1,$$
les points stationnaires de f sont les points $(-1,0)$ et $(-1/3,0)$. En plus,
$$\mathrm{Hess}_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x+4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$
d'où $\mathrm{Hess}_f(-1,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ et $\mathrm{Hess}_f(-1/3,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. Par conséquent la forme hessienne au point $(-1,0)$ est définie négative et ce point présente un maximum local ; de même, la forme hessienne au point $(-1/3,0)$ est non dégénérée et indéfinie et ce point présente un point selle.
2. La courbe $y = \sqrt{x}\,(x+1)$ pour $x \geqslant 0$ passe par les points $(0,0)$, $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\sqrt{3})$, $(1,2)$, et $(2, 3\sqrt{2})$; elle a une tangente verticale à l'origine, le point $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\sqrt{3})$ est un point d'inflexion, la pente en ce point vaut $\sqrt{3}$, et c'est la pente minimale de la courbe. Ces faits se déduisent des expressions $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2}(\sqrt{x})^{-1}$ et $y'' = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$. La courbe constituée des points tels que $f(x,y) = 0$ et $x \geqslant 0$ s'obtient par réflexion de la courbe $y = \sqrt{x}\,(x+1)$ pour $x \geqslant 0$ par rapport à l'axe des x.
3. Dans la boule ouverte
$$\{(x,y,z); (x+1)^2 + y^2 + x^2 < 1\} \subseteq \mathbb{R}^3,$$
le graphe $z = f(x,y)$ de la fonction f ne rencontre le plan des x et y qu'au point $(-1,0)$. Par conséquent, l'intersection $D \cap \mathscr{C}$ du disque
$$D = \{(x,y); (x+1)^2 + y^2 < 1\}$$
avec $\mathscr{C}$ ne consiste qu'au point $(-1,0)$.
4. Voir l'indication de l'exercice précédent.
5. Quel que soit le point (x_0,y_0) de $\mathscr{C}$ distinct de $(-1,0)$, d'après (1.),
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) \neq (0,0).$$
L'assertion est donc une conséquence immédiate du théorème des fonctions implicites.
